CONCOURS COMMUN MINES.PONTS.TELECOM... 1979

OPTION M - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option M, comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls : $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : 0,1,2,...

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, les deux symboles exp(x) et e^x seront utilisés concurremment.

Les candidats pourront admettre les résultats qu'ils n'auraient pas démontrés, à condition de le préciser explicitement.

PARTIE I

A deux fonctions f et g de E et au réel x de $\mathbb{R}_+$, faisons correspondre le réel $f*g(x)$ défini par la relation :

$$f*g(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

1°) a) Montrer que l'application, notée $f*g$, $x \rightsquigarrow f*g(x)$ appartient à E.

b) Montrer : $f*g = g*f$

c) Montrer que l'application $(f,g) \rightsquigarrow f*g$ de ExE dans E est bilinéaire.

Il sera admis que l'opération $*$ est associative.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$; soit $f_{\lambda,n}$ la fonction, définie pour $x \in \mathbb{R}_+$, par la relation :

$$f_{\lambda,n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{\lambda x}$$

Vérifier brièvement que la fonction $f_{\lambda,n}$ appartient à E et montrer la propriété :

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \qquad f_{\lambda,n} * f_{\lambda,p} = f_{\lambda,n+p}$$

PARTIE II

Soit A un réel strictement positif ; soit I l'intervalle [0,A].

1°) Soient λ,t,a trois nombres réels fixés ; soit la série de terme général u_n n = 1,2,... défini par la relation :

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, e^{n\lambda(t-a)}$$

Montrer que cette série est convergente et calculer sa somme S(t) :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

.../...

2°) Soit f une fonction réelle définie et continue sur I ; soit a un réel de I.

a) Montrer la propriété :

$$\forall\ \varepsilon \qquad \exists\ N\ :\ \forall\ n > N\ :\ \forall\ t \in I \qquad \left| \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!}\ e^{p\lambda(t-a)} f(t) \right| < \varepsilon$$

b) En déduire :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \int_0^A e^{p\lambda(t-a)} f(t)\ dt = \int_0^A \left[1 - \exp\left(-e^{\lambda(t-a)}\right)\right] f(t)\ dt$$

3°) Pour t et a fixés appartenant à $\mathbb{R}_+$, trouver la limite lorsque λ croit indéfiniment, de l'expression : $1 - \exp\left(-e^{\lambda(t-a)}\right)$.

4°) Soit $I(\lambda)$ l'expression :

$$I(\lambda) = \int_0^A \left[1 - \exp\left(-e^{\lambda(t-a)}\right)\right] f(t)\ dt - \int_a^A f(t)\ dt \qquad 0 \leqslant a \leqslant A$$

a) Soit α un réel positif ($\alpha \leqslant \inf(a, A-a)$) ; en écrivant $I(\lambda)$ sous la forme :

$$I(\lambda) = \int_0^{a-\alpha} \phi(t)\ dt + \int_{a-\alpha}^{a} \phi(t)\ dt + \int_a^{a+\alpha} \Psi(t)dt + \int_{a+\alpha}^{A} \psi(t)dt$$

où ϕ et ψ sont deux fonctions continues, montrer :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda) = 0$$

b) En déduire :

$$\int_a^A f(t)\ dt = \lim_{\lambda \to +\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \int_0^A e^{p\lambda(t-a)} f(t)\ dt \right\}.$$

PARTIE III

I désigne toujours l'intervalle [0,A] ; $\overset{\circ}{I}$, l'intervalle]0,A[.

1°) Soit f une fonction réelle, définie et continue sur I, telle que :

$$\exists\ M \qquad M \in \mathbb{R}_+\ :\ \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \left| \int_0^A e^{kt} f(t)\ dt \right| < M\ .$$

Montrer, à l'aide de la question n°4 de la partie II :

$$\forall\ a \in \overset{\circ}{I} \qquad \int_a^A f(t)\ dt = 0\ .$$

En déduire la nullité de f sur I .

2°) Soit f une fonction réelle, définie et continue sur I, telle que :

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \qquad \int_0^A t^k f(t)\ dt = 0\ .$$

En effectuant le changement de variable $t = ae^u$ et en posant : (avec $a \in \overset{\circ}{I}$)

$$g(u) = e^u f(ae^u) \qquad B = \operatorname{Log} \frac{A}{a}$$

montrer que toutes les intégrales $\int_0^B e^{nu} g(u)\ du$ $n \in \mathbb{N}$ sont majorées en valeur absolue.

En conclure que la fonction f est nulle.

.../...

3°) Soit f une fonction réelle définie et continue sur $J = [0,2A]$; soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$D = [-A, +A] \times [-A, +A]$$

a) Montrer :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \iint_D e^{n(x+y)}\, f(A-x)\, f(A-y)\, dxdy = \left[\int_{-A}^{A} e^{nx}\, f(A-x)\, dx\right]^2$$

b) Soit D_+ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$D_+ = \{\, (x,y) \in D \mid x+y > 0 \,\}$$

Effectuer le changement de variables

$$x = A-u$$
$$y = A+u-v$$

dans l'intégrale :

$$\iint_{D_+} e^{n(x+y)}\, f(A-x)\, f(A-y)\, dx\, dy$$

Quelle est la valeur de cette intégrale lorsque la fonction f vérifie la condition (C) suivante ?

(C) $\quad \forall\, x \in J \quad \int_0^x f(x-t)\, f(t)\, dt = 0$.

c) En déduire que si la fonction f vérifie la condition (C), il vient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \left| \int_{-A}^{A} e^{nt} f(A-t)\, dt \right| \leq A\sqrt{2} \sup_{t \in J} |f(t)|$$

A l'aide de la question n°1, montrer que, si la fonction f vérifie (C), elle est nulle sur I.

PARTIE IV

Soient f et g deux fonctions de E ; soit h la fonction de E $t \mapsto t$; soit Φ la fonction :

$$\Phi = (h.f) * g + f * (h.g)$$

h.f désigne la fonction $t \mapsto h(t).f(t)$.

1°) Montrer :

$$\Phi = h.(f * g) \ .$$

Montrer, en considérant la fonction $f * (h.g) * \Phi$, que si les fonctions f et g vérifient :

$$f * g = 0$$

il vient :

$$f * (h.g) = 0$$

En déduire plus généralement :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad f * (h^n.g) = 0$$

h^n désigne la fonction $t \mapsto [h(t)]^n$.

2°) Montrer que si f et g vérifient la relation $f * g = 0$ et s'il existe un réel a positif tel que $f(a) \neq 0$, la fonction g est nulle.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail